المحاضرة الثامنة

/ /

مثال: أجريت دراسة بإحدى الجامعات للمقارنة بين المعدلات التي حصلت عليها مجموعتان من الطلبة الأولى من المتزوجين والأخرى من غير المتزوجين ولهذه الغاية أخذت عينتان واحدة من كل منهما وبعد إجراء الامتحان كانت لدينا النتائج التالية:

عينة المتزوجين $n = 100,\ \bar{X} = 28.5,\ S_1 = 4,\ M_1$

عينة غير المتزوجين $m = 100,\ \bar{Y} = 27.3,\ S_2 = 3,\ M_2$

المطلوب: عين مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين $M_1 - M_2$ وذلك على مستوى أهمية $\alpha = 0,05$ حيث: $Z_{0,975} = 1,96$.

الحل: بما أن حجم العينة الأولى وحجم العينة الثانية أكبر من 30 عندئذ يمكن أن نعوض عن كل من σ_1^2 و σ_2^2 أو كل من S_1^2 و S_2^2 يمثل مقدر جيد بالنسبة له ونفس الكلام بالنسبة للعينة الثانية. ومن أجل إيجاد مجال الثقة $M_1 - M_2$ سوف نبحث عن كمية محورية نبحث عن كمية وهذه الكمية هي

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (M_1 - M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

بما أن $n > 30$; $\sigma_2^2 = S_2^2$, $\sigma_1^2 = S_1^2$

بعد ذلك نحصر هذه الكمية بين كميتين معلومتين من جدول توزيع الكمية المحورية بما يقابل قدره $1 - \alpha$ علماً أن $\alpha = 0,05$ و $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,975} = 1,96$ بعد ذلك نجري عملية الفرل لـ $M_1 - M_2$ فنحصل على مجال الثقة المطلوب وهو

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\ ;\ (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right]$$

$$= \left[(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}\ ;\ (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}\right]$$

$$= \left[(28,5 - 27,3) - (1,96)\sqrt{\frac{16}{100} + \frac{9}{100}}\ ;\ (28,5 - 27,3) + (1,96)\sqrt{\frac{16}{100} + \frac{9}{100}}\right]$$

$$= [1,2 - 0,98\ ;\ 1,2 + 0,98] \Rightarrow \underset{1,2-0,98}{\text{موجب}} < M_1 - M_2$$ وهو مجال الثقة

إذا طلبوا ما المقدار النقطي للفرق $\hat{M}_1, \hat{M}_2$ فنقول هو

$$\hat{M}_1 - \hat{M}_2 = \bar{X} - \bar{Y}$$

إذا قالوا ما هو الخطأ المرتكب في تقدير $M_1 - M_2$ حالياً على نفس مستوى الأهمية نجيب إنه:

/ /

$$e = \left| \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m}} \right| = 0,98$$

إذا طلب مناقشة النتيجة

بما أن طرفي مجال الثقة موجبة فإن $\mu_1 > \mu_2 \Leftarrow \mu_1 - \mu_2 > 0$ أي إذا

معدلات المتزوجين أكبر من معدلات غير المتزوجين

مهم نظري

إيجاد مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين إحصائيين طبيعيين منهما التباين مشترك ومجهول

نفرض أنه لدينا مجتمعين إحصائيين طبيعيين الأول $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ والثاني $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ ولنأخذ من المجتمع الأول عينة حجمها n ومتوسطها $\bar{X}$ وانحرافها s_1 وتباينها s_1^2 ولنوجد مجال الثقة $(\mu_1 - \mu_2)$ مستوى أهمية α معلوم ولنأخذ عينة عشوائية من المجتمع الثاني حجمها m حيث $\bar{Y}$ متوسطها وتباينها s_2^2 وانحرافها هو s_2.

ومن أجل ذلك سوف نبحث عن كمية محورية وهذه الكمية هي:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$$

$$= S_P^2 = \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{m+n-2} \Rightarrow S_P = \sqrt{\frac{(n-1)s_1^2 + (m+1)s_2^2}{m+m-2}}$$

بعد ذلك نحصر هذه الكمية المحورية بين كميتين معلومتين من جدول توزيع الكمية المحورية باحتمال قدره $1-\alpha$

أي: $P(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2) \leq T \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)) = 1-\alpha$

$$\Rightarrow P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2) \leq \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\right) = 1-\alpha$$

ومن ثم نجري عملية العزل لـ $\mu_1 - \mu_2$:

$$\Rightarrow P\left(-S_P t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \leq \bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2) \leq S_P t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right) = 1-\alpha$$

/ /

نضيف للطرفين $(\bar{X}-\bar{Y})$ ونضرب بإشارة (-)

$$=P\left(\bar{X}-\bar{Y}-s_p t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} < \mu_1-\mu_2 < \bar{X}-\bar{Y}+s_p t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right)=1-\alpha$$

وبالتالي فإن مجال الثقة لهذه الحالة يعطى بالشكل

مثال: أجريت دراسة لنوعين من الأدوية منتجين من شركتين مختلفتين في بلد ما ولكن بامتياز من نفس الشركة الأم وذلك لعلاج مرض معدي، والهدف من الدراسة هو معرفة إذا كان تركيز المادة الفعالة في الدواء هو نفسه أم لا ولهذا ذلك أخذت عينة عشوائية حجمها $n=10$ من الدواء الأول وتبين أن متوسط الكمية الفعالة يساوي 3.1 ml وبانحراف معياري 0.5 ml وأخذت عينة من الدواء الثاني حجمها $m=8$ فكان متوسط المادة الفعالة في الدواء الثاني هو 2.7 ml وبانحراف معياري 0.7 ml وإذا علمنا أن الكمية المادة الفعالة في الدواء لكل من الدوائين تخضع للتوزيع الطبيعي وأن لهما نفس التباين σ^2 (مجهول) عندئذ عين مجال الثقة حول الفرق $\mu_1-\mu_2$ حيث μ_1 هو متوسط المادة الأولى و μ_2 متوسط المادة الثانية وذلك عند مستوى أهمية $\alpha=0.05$ علماً أن $t_{0.975}(16)=2.12$

الحل: لدينا

الدواء الأول X	$n=10$	$\bar{X}=3.1$	$s_1=0.5$	μ_1	σ_1
الدواء الثاني Y	$m=8$	$\bar{Y}=2.7$	$s_2=0.7$	μ_2	σ_2

من الواضح أن المجتمعين طبيعيين فيهما σ مشتركة ومجهولة وحجوم العينات صغيرة عندئذ من أجل إيجاد مجال الثقة $(\mu_1 \; \mu_2)$ سوف نبحث عن كمية محورية وهذه الكمية هي

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\sim t(16)$$

ومنه نحصر هذه الكمية بين كميتين معلومتين من جدول توزيع الكمية المحورية بالمجال قدره 0.95

ومن ثم نجري عملية العزل لنحصل على مجال الثقة $\mu_1 \; \mu_2$ والذي يأخذ الشكل

$$\left[\bar{X}-\bar{Y}-s_p t_{0.975}(16)\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} \; ; \; \bar{X}-\bar{Y}+s_p t_{0.975}(16)\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right]$$

/ /

علماً إن

$$SP=\sqrt{\frac{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}{n+m-2}}=0,596$$

$$\bar{X}-\bar{Y}=0,4$$

$$\Rightarrow\left[0,4-(0,596)(2,12)\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}\,;\,0,4+(0,596)(2,12)\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}\right]$$

$$=[-0,2\leq \mu_1-\mu_2\leq 1]$$

إذا كان μ_1, μ_2 محصور بين عددين أحدهما سالب والآخر موجب فيكون

$$\mu_1-\mu_2=0 \Rightarrow \mu_1=\mu_2$$

5. إيجاد مجال الثقة للنسبة في المجتمع

إن إيجاد مجال الثقة للنسبة للمجتمع تعني إيجاد مجال الثقة لوسيط المجتمع الإحصائي البرنولي لذلك نفرض انه لدينا مجتمع إحصائي برنولي وسيطه P ولنأخذ من هذا المجتمع الإحصائي عينة عشوائية حجمها n (أكبر من 30) علماً أن $\hat{P}=\bar{X}$ عندئذٍ لنوجد مجال الثقة للوسيط P عند مستوى أهمية α المعلوم

الحل: من اجل إيجاد مجال الثقة للوسيط P سوف نبحث عن كمية محورية وهذه الكمية هي:

$$Z_{\bar{X}}=\frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{P.q}{n}}}\sim N(0,1)\Rightarrow Z_{\bar{X}}=\frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$$

$$P\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\leq\frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}\leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha \Rightarrow$$

$$P\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\leq\hat{P}-P\leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right)=1-\alpha$$

نضيف للأطراف $\hat{P}$ ونضرب بـ $(-)$

$$\Rightarrow P\left(\hat{P}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\leq P\leq\hat{P}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right)=1-\alpha$$

$$\left[\hat{P}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\,;\,\hat{P}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right]$$

والخطأ المطلق الأعظمي هو:

$$e=\mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$

Farah Notebook

/ /

ما هو حجم العينة اللازم أخذه ليكون الخطأ المطلق الأعظمي أصغر أو يساوي ε عدد ثابت معلوم؟

$$e \leq \varepsilon \Rightarrow e^2 \leq \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\varepsilon^2} Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$$